Soluție

1. a) $\begin{vmatrix} x_A & 2x_A & 1 \\ x_B & 2x_B & 1 \\ x_C & 2x_C & 1 \end{vmatrix} = 0$.

b) $\det(M) = \pm 2S_{ABC} = \pm 1$.

c) Fie $M^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Din $M^{-1} \cdot M = I_3$, rezultă $a_1 + b_1 + c_1 = 0,\ a_2 + b_2 + c_2 = 0,\ a_3 + b_3 + c_3 = 1$, de unde concluzia.

2. a) $X = \begin{pmatrix} m & n \\ -3n & m \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} p & q \\ -3q & p \end{pmatrix} \Rightarrow X + Y = \begin{pmatrix} u & v \\ -3v & u \end{pmatrix}$, cu $u = m + p \in \mathbb{Z}, v = n + q \in \mathbb{Z}$.

b) $XY = O_2 \Rightarrow \det(X) \cdot \det(Y) = 0$ deci, luând X, Y ca mai sus, $m^2 + 3n^2 = 0$ sau $p^2 + 3q^2 = 0$, de unde $m = n = 0$ sau $p = q = 0$.

c) Unitatea inelului este I_2. Dacă $X, Y \in A$ și $XY = I_2$, atunci $\det(X) \cdot \det(Y) = 1$ și $\det(X), \det(Y) \in \mathbb{Z}$, deci $\det(X) = \pm 1$. Rezultă $X = \pm I_2$; aceste două elemente sunt inversabile în inelul dat.